ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXXII, zeszyt 1 - 1984

STANISŁAW KICZUK

STOSOWALNOŚĆ DOWODÓW ZAŁOŻENIOWYCH W SYSTEMACH OPARTYCH NA KLASYCZNYM RACHUNKU LOGICZNYM

1. Współczesne systemy logik nieklasycznych, które są oparte na klasycznym rachunku logicznym (nieraz tylko na klasycznym rachunku zdań), budowane są z reguły metodą aksjomatyczną. Wśród wspomnianych systemów oraz innych im podobnych istnieją takie, w których występują aksjomaty specyficzne i reguły specyficzne w stosunku do aksjomatów i reguł klasycznego rachunku logicznego. Mogą też być takie systemy, gdzie mamy do czynienia tylko ze specyficznymi aksjomatami. W wypadku systemów drugiego typu można łatwo posługiwać się dowodami założeniowymi. Reguła tworzenia takich dowodów jest wówczas tak formułowana, iż jako wiersze dowodu mogą wystąpić aksjomaty specyficzne lub tezy uprzednio udowodnione. Przy wyprowadzaniu zaś nowych wierszy dowodów założeniowych z wierszy poprzednich korzysta się tylko z logicznych reguł dołączania nowych wierszy do dowodu. Warto dodać, że na podstawie twierdzenia o dedukcji każda teza systemu aksjomatycznego drugiego typu jest tezą odpowiedniego systemu założeniowego.

Istnieje problem, czy można stosować dowody założeniowe w takich systemach ujętych aksjomatycznie i opartych na klasycznym rachunku logicznym, w których oprócz aksjomatów specyficznych występują reguły specyficzne prowadzące od tez do tez. Przykładem takiego rachunku w logikach modalnych może być system T, w którym przyjmuje się m.in. regułę pierwotną głoszącą, że jeżeli wyrażenie ϕ jest tezą, to tezą jest również wyrażenie $\ulcorner L\phi \urcorner$[1]. Tego typu systemem jest również system M (równoważny z systemem T), gdzie przyjmuje się m.in. regułę pierwotną głoszącą, że jeżeli tezą jest wyrażenie $\ulcorner \phi \equiv \psi \urcorner$, to tezą jest wyrażenie $\ulcorner M\phi \equiv M\psi \urcorner$[2]. Przykłady takich systemów można znaleźć również w logice zdań czasowych. System G.H. von Wrighta „And Then" zawiera np. regułę ekstensjonalności głoszącą, że je-

[1] Por. G. E. Hughes, M. J. Cresswell, *An introduction to Modal Logic*, London 1974, s. 31.

[2] Por. G. H. von Wright, *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam 1951, s. 84-85.

żeli równoważność zbudowana z dwóch wyrażeń jest tezą, to człony tej równoważności można odpowiednio zastępować wzajemnie w tezach systemu[3]. Na gruncie systemów logiki zdań czasowych, która jest formalną teorią funktorów związanych z czasami gramatycznymi, znajdujemy m.in. regułę głoszącą, że jeżeli tezą jest wyrażenie ϕ, to tezą jest wyrażenie $\ulcorner G\phi \urcorner$ (będzie zawsze tak, że ϕ)[4].

W dalszych dociekaniach dotyczących postawionego problemu posłużymy się terminem „założeniowy system klasycznego rachunku logicznego". Ten termin będziemy rozumieli tak, iż obejmuje on założeniowe ujęcie klasycznego rachunku logicznego zaprezentowane w książce J. Słupeckiego i L. Borkowskiego pt. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*[5]. Warto dodać, że dla znaku identyczności przyjmiemy aksjomat $\bigwedge_x x = x$, co znajdzie wyraz w definicji tezy w systemie założeniowym.

Aby móc, w miarę możliwości przejrzyście, sformułować odpowiednie definicje oraz sformułować i udowodnić twierdzenia niezbędne dla rozwiązania postawionego problemu, wprowadzimy następujące oznaczenia:

S = system aksjomatyczny oparty na klasycznym rachunku logicznym o aksjomatach specyficznych A i dodatkowych regułach pierwotnych,

R $=\{R_1,\dots,R_n\}$, które od tez prowadzą do tez.

S' = system założeniowy odpowiadający systemowi S.

2. Definicja indukcyjna tezy systemu S

D. a) Tezami pierwszego rzędu systemu S są: 1) aksjomaty klasycznego rachunku logicznego oraz 2) aksjomaty specyficzne A.

b) ϕ jest tezą n-rzędu (n>1) systemu S $\equiv$ istnieją takie tezy $\phi_1,\dots,\phi_k$ rzędów mniejszych od n, że ϕ jest otrzymane z nich za pomocą jakiejś z reguł pierwotnych klasycznego rachunku logicznego lub za pomocą jakiejś z reguł należących do R.

c) ϕ jest tezą systemu S $\equiv \bigvee_{n \in N}$ ϕ jest tezą n-rzędu systemu S.

Definicja indukcyjna tezy systemu S'

D'. a) Tezami pierwszego rzędu są: 1) wyrażenia, dla których istnieje założeniowy dowód nie wprost, w którym korzysta się tylko z pierwotnych reguł klasycznego rachunku logicznego dołączania nowych wierszy do dowodu, 2) aksjomat dla identyczności $\bigwedge_x x = x$ oraz 3) aksjomaty specyficzne A systemu S.

b) ϕ jest tezą n-rzędu (n>1) systemu S' $\equiv$ istnieją wyrażenia $\phi_1,\dots,\phi_k$ będące tezami systemu S' rzędów mniejszych od n takie, że bądź (1) istnieje założeniowy dowód nie wprost wyrażenia ϕ, w którym ko-

---

[3] Por. G. H. von Wright, *And Then*, „Commentationes Physico-Mathematicae. Societas Scientiarum Fennica", vol. 32(1966), nr 7, s. 2-3.

[4] Por. A. N. Prior, *Past, Present and Future*, Oxford 1967, s. 175-177.

[5] Por. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1966, s. 10-45, 77-117.

rzysta się z wyrażeń $\phi_1,...,\phi_k$ oraz z pierwotnych reguł dołączania nowych wierszy do dowodu sformułowanych w założeniowym klasycznym rachunku logicznym, bądź (2) ϕ jest otrzymane z $\phi_1,...,\phi_k$ za pomocą jakiejś z reguł należących do R.

c) ϕ jest tezą systemu S' $\equiv \bigvee_{n \in N} \phi$ jest tezą n-rzędu systemu S'.

Twierdzenie 1

Jeżeli ϕ jest tezą systemu S, to ϕ jest tezą systemu S'.

Dowód twierdzenia jest indukcyjny (indukcja względem rzędu tezy).

1° Jeśli ϕ jest tezą 1. rzędu systemu S, to ϕ jest tezą systemu S'.
Z założenia, że (1) ϕ jest tezą 1. rzędu systemu S, na podstawie D, D' oraz twierdzenia o równoważności systemów aksjomatycznego i założeniowego klasycznego rachunku logicznego dochodzimy do wniosku, że (2) ϕ jest tezą systemu S'.

2° Przyjmujemy jako założenie indukcyjne, że

(1) $\bigwedge_{\phi}$ (Jeśli ϕ jest tezą systemu S rzędu mniejszego od n, to ϕ jest tezą systemu S')

i zakładamy, że

(2) ϕ jest tezą n-rzędu systemu S. Stąd na podstawie D.b) dochodzimy do wniosku, że

(3) istnieją takie wyrażenia $\phi_1,...,\phi_k$ będące tezami systemu S rzędów mniejszych od n, że ϕ jest uzyskane z nich za pomocą jakiejś z pierwotnych reguł klasycznego rachunku logicznego lub jakiejś z reguł należących do R. W myśl założenia indukcyjnego $\phi_1,...,\phi_k$ są tezami systemu S'. Stąd na podstawie D'.c) i D'.b) wynika, że

(4) wyrażenia $\phi_1,...,\phi_k$ są tezami systemu S' rzędów mniejszych od pewnej liczby naturalnej 1. Z (3) i (4) wynika w myśl D'.b), że

(5) ϕ jest tezą l-rzędu systemu S'. A więc, w myśl D'.c), ϕ jest tezą systemu S'.

Twierdzenie 2

Jeżeli ϕ jest tezą systemu S', to ϕ jest tezą systemu S.

Dowód twierdzenia jest indukcyjny (indukcja względem rzędu tezy).

1° Jeżeli ϕ jest tezą 1. rzędu systemu S', to ϕ jest tezą systemu S.
Z założenia, że (1) ϕ jest tezą 1. rzędu systemu S', na podstawie D'. i D. oraz twierdzenia o równoważności systemów założeniowego i aksjomatycznego klasycznego rachunku logicznego dochodzimy do wniosku, że (2) ϕ jest tezą systemu S.

2° Przyjmujemy jako założenie indukcyjne, że

(1) $\bigwedge_{x}$ (Jeśli ϕ jest tezą systemu S' rzędu mniejszego od n, to ϕ jest tezą systemu S) i zakładamy, że

(2) ϕ jest tezą n-rzędu systemu S'. Stąd na podstawie D'.b) dochodzimy do wniosku, że:

(3) istnieją takie wyrażenia $\phi_1,...,\phi_k$ będące tezami systemu S' rzędów mniejszych od n, że bądź 1) ϕ jest uzyskane za pomocą założeniowego dowodu nie wprost, w którym korzysta się z tez $\phi_1,...,\phi_k$ oraz z pierwotnych reguł dołączania nowych wierszy do dowodu sformułowanych w założeniowym klasycznym rachunku logicznym, bądź 2) ϕ jest otrzymane z tez $\phi_1,...,\phi_k$ za pomocą jakiejś z reguł należących do R. Z (3) i (1) wynika, że:

(4) wyrażenia $\phi_1,...,\phi_k$ są tezami systemu S. Stąd oraz z D.c) i D.b) wynika, że:

(5) wyrażenia $\phi_1,...,\phi_k$ są tezami systemu S rzędów mniejszych od pewnej liczby naturalnej m. Z (3), (5) oraz D.b) wynika, że:

(6) ϕ jest tezą m-rzędu systemu S. A więc, w myśl D.c), ϕ jest tezą systemu S.

3. Udowodnione twierdzenia pozwalają na wyprowadzenie wniosku, że jeżeli jakieś wyrażenie jest tezą w systemie aksjomatycznym, w którym występują aksjomaty specyficzne i specyficzne reguły wnioskowania prowadzące od tez do tez, to albo posiada dowód założeniowy, albo jest otrzymane z tez poprzednio udowodnionych za pomocą jakiejś reguły należącej do R. Dowody założeniowe są tu formułowane tak, że jako wiersze dowodu mogą wystąpić aksjomaty specyficzne lub tezy uprzednio udowodnione, a przy wprowadzaniu nowych wierszy korzysta się tylko z reguł logicznych dołączania nowych wierszy do dowodu. Z uwagi na powyższe ustalenia dowody twierdzeń podawane w wielu systemach logik nieklasycznych, opartych na klasycznym rachunku logicznym, mogą być w prostszy sposób formułowane jako dowody założeniowe.

Zauważymy jeszcze, że podane tu twierdzenia można uogólnić, dowodząc je w analogiczny sposób dla systemów opartych na takich nieklasycznych rachunkach logicznych, dla których jest ważne twierdzenie o dedukcji (np. dla systemów opartych na intuicjonistycznym rachunku logicznym).

THE APPLICABILITY OF SUPPOSITJONAL PROOFS IN SYSTEMS BASED ON CLASSIC LOGICAL CALCULUS

Summary

In the paper the author gives appropriate definitions and demonstrates two theorems which show that in the systems of non-classic logics formulated axiomatically and based on the classic logical calculus (in which apart from specific axioms there exist specific rules of conclusions leading from theorems to other theorems) suppositional proofs of theorems can be applied. Suppositional proofs are formulated in such a way that specific axioms or theorems proved earlier can appear as verses of the argument. In introducing new verses logical rules of attaching new verses to the argument are used.